

$$4. \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} \quad \mathcal{K}: C - \frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$5. \int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)} dx \quad \mathcal{K}: \frac{x+2}{2(x^2+1)} + 2\operatorname{arctg} x + \ln \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

$$6. \int \frac{(x+1)^4 dx}{(x^2+2x+2)^3} \quad \mathcal{K}: \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2} + C.$$

4-§. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ кўринишдаги интеграллар

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ кўринишидаги интеграллар (R — $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан рационал функция) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш ёрдамида рационал функцияларнинг интегралларига (3-§) келтирилади. Чунки,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Бундай алмаштириш кўп ҳолларда мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Шу сабабли баъзи хусусий ҳолларда кўрсатилган хилдаги интегралларни топишда куйидаги содда ўрнига қўйишлардан фойдаланилади:

а) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\sin x$ га нисбатан тоқ функция, яъни

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда $\cos x = t$ ўрнига қўйиш бу функцияни рационаллаштиради;

б) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\cos x$ га нисбатан тоқ функция, яъни

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда интеграл $\sin x = t$ ўрнига қўйиш билан рационал функцияларни интеграллашга келтирилади;

в) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт функция, яъни

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда бу функция $\operatorname{tg} x = t$ ўрнига қўйиш билан рационаллаштирилади. Бу ҳолда

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2},$$

$$x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2};$$

г) агар $R(\operatorname{tg} x)$ бўлса, у ҳолда интеграл остидаги ифода яна $\operatorname{tg} x = t$ ўрнига қўйиш билан рационаллаштирилади.

1- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}.$$

Е ч и ш. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланиб, интегрални топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; \right. \\ &\quad \left. dx = \frac{2dt}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right\} = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + 3 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \\ &= \int \frac{dt}{(t + 2)^2} = -\frac{1}{t + 2} + C = C - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}. \end{aligned}$$

2- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x} dx.$$

Е ч и ш. Интеграл остидаги функция $\sin x$ га нисбатан тоқ функция, шунинг учун $\cos x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx &= \left\{ \cos x = t; \quad \sin^2 x = 1 - t^2, \right. \\ &\quad \left. \sin x dx = -dt; \quad \cos 2x = 2t^2 - 1 \right\} = \\ &= \int \frac{(1 + \sin^2 x) \sin x}{\cos 2x} dx = \int \frac{(2 - t^2)(-dt)}{2t^2 - 1} = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(2t^2 - 4) dt}{2t^2 - 1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{3}{2t^2 - 1} \right) dt = \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C.$$

3-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\cos x$ га нисбатан ток функция, шу сабабли $\sin x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x (1 + \cos^2 x) \cos x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t, \cos^2 x = 1 - t^2 \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)}{t^2 + t^4} dt = \int \frac{t^4 - 3t^2 + 2}{t^4 + t^2} dt.$$

Энди нотўғри рационал касрнинг бутун қисмини ажратиб ва тўғри рационал касрни энг содда касрларга ёйиб, интегрални топамиз:

$$\int \frac{t^4 - 3t^2 + 2}{t^4 + t^2} dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2} \right) dt = t - \frac{2}{t} - 6 \operatorname{arctg} t + C.$$

Шундай қилиб, эски ўзгарувчига қайтсак:

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

4-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3}$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт функция, шу сабабли $\operatorname{tg} x = t$ деб оламиз:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2} \\ x = \operatorname{arctg} t; dx = \frac{dt}{1 + t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dt}{1 + t^2}}{\frac{t^2}{1 + t^2} + 3} =$$

$$= \int \frac{dt}{3 + 4t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t)}{(\sqrt{3})^2 + (2t)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$$

5- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$$

Е ч и ш. Интеграл остидаги функция факат $\operatorname{tg} x$ га боғлиқ бўлгани учун $\operatorname{tg} x = t$ деб оламиз:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \left\{ \operatorname{tg} x = t, \quad x = \arctg t, \right. \left. dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}.$$

Интеграл остидаги функцияни энг содда касрларга ёйиб, интегрални топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)} &= \int \left(\frac{1}{2(1+t)} - \frac{t-1}{2(1+t^2)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln |1+t| - \frac{1}{4} \ln |1+t^2| + \frac{1}{2} \arctg t + C. \end{aligned}$$

Эски ўзгарувчи x га қайтсак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} &= \frac{1}{2} \ln |1+\operatorname{tg} x| - \frac{1}{4} \ln (1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2} x + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \right| + \frac{1}{2} x + C = \frac{1}{2} \ln |\cos x (1+\operatorname{tg} x)| + \\ &+ \frac{1}{2} x + C = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln |\cos x + \sin x| + C. \end{aligned}$$

4- дарсхона топшириғи

Берилган аникмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$. Ж: $\frac{1}{5} \ln \left| 5\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + C.$
2. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. Ж: $\frac{1}{2} \arctg \left(2\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$
3. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$. Ж: $\ln |\sin x| - \sin x + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sin x (2\cos^2 x - 1)}$. Ж: $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x} \right| + C.$
5. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$. Ж: $\frac{1}{3} \arctg (3 \operatorname{tg} x) + C.$
6. $\int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin x + \cos x}$. Ж: $\frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C.$

$$7. \int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x}. \quad \text{Ж: } \frac{4}{25}x - \frac{3}{25} \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{2}{5(\operatorname{tg} x + 2)} - \\ - \frac{3}{25} \ln |\cos x| + C.$$

$$8. \int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 3) dt}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}. \quad \text{Ж: } \ln(\operatorname{tg}^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

4- мустақил иш

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

$$1. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}. \quad \text{Ж: } \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C.$$

$$2. \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx. \quad \text{Ж: } \ln(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$3. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{4} \ln \frac{5 - \sin x}{1 - \sin x} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$6. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx. \quad \text{Ж: } C - \ln |\cos x - \sin x|.$$

5- §. Таркибида тригонометрик функциялар бўлган баъзи интеграллар

6.5.1. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ кўринишидаги интеграллар куйидагича топилади:

а) агар $n > 0$ тоқ бўлса, $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

1-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx.$$

Ечиш. $\sin^3 x$ даражада битта $\sin x$ кўпайтувчини ажратамиз ва уни дифференциал остига киритамиз:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \\ &= - \int \sin^2 x \cos^2 x d(\cos x) = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= - \int (\cos^2 x - \cos^4 x) d(\cos x) = C - \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x; \end{aligned}$$

б) агар $m > 0$ тоқ бўлса, у ҳолда $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

2- м и с о л . Интегрални топинг:

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}.$$

Е ч и ш.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^{4/3} x} &= \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^{3/4} x} = \\ &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) d(\sin x)}{\sin^{4/3} x} = \int \left(\sin^{-\frac{4}{3}} x - \sin^{\frac{2}{3}} x \right) d(\sin x) = \\ &= -3 \sin^{-\frac{1}{3}} x - \frac{3}{5} \sin^{\frac{5}{3}} x + C = C - \frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{\sin^5 x}. \end{aligned}$$

в) агар $m, n \geq 0$ жуфт бўлсалар, у ҳолда

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$ формулалардан фойдаланган ҳолда иккиланган бурчакларга ўтиб, синус ва косинуснинг даражасини пасайтириш керак.

3- м и с о л . Интегрални топинг:

$$\int \sin^4 x dx.$$

Е ч и ш.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} (x - \sin 2x + \\ &+ \int \cos^2 2x dx) = \frac{1}{4} (x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx) = \\ &= \frac{1}{4} (x - \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x) + C = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C. \end{aligned}$$

г) агар $m, n \leq 0$ ва улардан бири тоқ бўлса, у ҳолда сурат ва махражни $\sin x$ ёки $\cos x$ га, буларнинг қайсиниси тоқ даражадалигига қараб, қўшимча қўпайтириш усулидан фойдаланиш керак.

4- м и с о л . Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Е ч и ш.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = - \int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C = \ln \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

д) агар $m+n < 0$ ва жуфт бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} x = t$ ёки $\operatorname{ctg} x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Агар бунда $m < 0$ ва $n < 0$ бўлса, у ҳолда сунъий усул қўлланиши мумкин, бунинг учун суратдаги 1 ни $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^k = 1$ «тригонометрик бир»га алмаштириш керак. Бу формулада $k = \frac{|m+n|}{2} - 1$.

5-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{13}{3}} x} dx.$$

Ечиш. Бунда $m = \frac{1}{3}$, $n = -\frac{13}{3}$, $m+n = -4 < 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{13}{3}} x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \frac{dx}{\cos^2 x} = dt; \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} x dx}{\cos^2 x \cos^{\frac{10}{3}} x} = \int \frac{t^{\frac{1}{3}} dt}{1+t^2} = \\ &= \int t^{\frac{1}{3}} (1+t^2) dt = \int \left(t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{7}{3}} \right) dt = \int t^{\frac{1}{3}} dt + \int t^{\frac{7}{3}} dt = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + \\ &+ \frac{3}{10} t^{\frac{10}{3}} + C = \frac{3}{4} \operatorname{tg}^{\frac{4}{3}} x + \frac{3}{10} \operatorname{tg}^{\frac{10}{3}} x + C. \end{aligned}$$

6-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$$

Ечиш. Бунда $m = -2$, $n = -4$, $m+n = -6 < 0$,

$k = \frac{|m+n|}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2$. Шундай қилиб:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x \cos^4 x} dx = \int \frac{(\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \\ &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{2dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x \cos^2 x} + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \end{aligned}$$

6.5.2. $\int \operatorname{tg}^n x dx$ ва $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ шаклдаги интеграллар, бунда $n > 0$ — бутун сон.

Бу хил интегралларни топишда $\operatorname{tg}^2 x$ ёки $\operatorname{ctg}^2 x$ кўпайтувчилар ажратилади ва улар $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ ва $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ формулалар бўйича алмаштирилади, бу формулалар тангенс ва котангенс даражаларини кетма-кет пасайтиради. Бу хил интегралларни $\operatorname{tg} x = t$ ёки $\operatorname{ctg} x = t$ ўрнига қўйишлар ёрдамида ҳам топиш мумкин.

7- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \operatorname{tg}^4 x \, dx.$$

Е ч и ш. Бу мисолга юкоридаги усулни қўлаймиз:

$$\begin{aligned} 1\text{-} \text{усл.} \quad \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

2- усл.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ x = \operatorname{arctg} t, \, dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{cases} = \int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = \int \frac{(t^4-1)+1}{1+t^2} dt = \\ &= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

6.5.3. $\int \sec^n x \, dx$ ва $\int \operatorname{cosec}^n x \, dx$ кўринишдаги интеграллар. Иккита ҳолни кўрамиз:

а) агар n тоқ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштиришдан фойдаланилади;

б) агар n жуфт бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланилади ёки $\sec^2 x$, ёки $\operatorname{cosec}^2 x$ кўпайтувчи ажратилиб, $\sec^2 x \, dx = d(\operatorname{tg} x)$ ёки $\operatorname{cosec}^2 x = d(\operatorname{ctg} x)$ деб олинади, қолган даражалар эса

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{ёки} \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

формулалар бўйича алмаштирилади.

8- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Е ч и ш. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ универсал ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \\ x = \frac{2 \operatorname{arctg} t}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int \frac{(1+t)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt = \\
&= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} + 2\ln|t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \ln|t| + \frac{t^4-1}{8t^2} + C = \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - 1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \\
&+ \frac{\left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \cdot 1}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot 8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C.
\end{aligned}$$

9- мисол. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ интегрални топинг.

Ечиш. $\frac{1}{\cos^2 x}$ кўпайтувчини ажратамиз ва $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$ деб

оламиз.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) = \\
&\int (1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.
\end{aligned}$$

6.5.4. $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ кўри-
нишдаги интеграллар куйидаги маълум тригонометрик формула-
лардан фойдаланилса, осон ҳисобланади:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta));$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Бу формулалар тригонометрик функциялар кўпайтмасини
йиғинди шаклида ифодалаш имконини беради.

10- мисол. $\int \sin 2x \cos 5x dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғинди
билан алмаштирамиз:

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin(-3x)) dx = \frac{1}{2} \int \sin 7x dx - \\
&- \frac{1}{2} \int \sin 3x dx = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + C.
\end{aligned}$$